

APPLICATION DE LA METHODE DES TRANSFORMATIONS INTEGRALES FINIES A LA MODELISATION D'UNE SONDE DE DEBITMETRIE SANGUINE INTRATISSULAIRE

DIMITRI TSACALOS

Groupe de Recherches Thermiques no. 14 du CNRS associé à l'Ecole,
 Centrale des Arts et Manufactures, 92290 Chatenay-Malabry, France
 et

FRANCIS J. DUPOIRIEUX

Actuellement stagiaire de Thèse à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales,
 92320 Châtillon sous Bagneux, France

et

DANIEL L. BALAGEAS

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales,
 92320 Châtillon sous Bagneux, France

(Reçu le 16 mai 1980)

Résumé—La méthode des transformations intégrales finies est appliquée à la modélisation d'une sonde sphérique de débitmétrie sanguine intratissulaire du type 'thermocouple chauffé' ou 'thermistor'. La modélisation ainsi réalisée est particulièrement générale. Elle permet, d'étudier l'influence sur la mesure des dimensions finies du milieu instrumenté. Il est montré que la perturbation apportée par les conditions aux limites extérieures n'est pas négligeable dès que les dimensions de la sonde deviennent supérieures au dixième de celles du milieu.

NOMENCLATURE

C , Chaleur spécifique massique [$J kg^{-1} °C^{-1}$];
 H , $= hr_s k_M^{-1}$;
 F_S , nombre de Fourier, $F_S = a_M tr_s^{-2}$;
 K_0 , $= k_M k_S^{-1}$;
 Q , puissance dissipée par unité de volume [$W m^{-3}$];
 R_0 , $= r_M r_S^{-1}$;
 T , température [$°C$];
 T^* , température superficielle de la sonde, $T^*(t) = T_S(r_S, t)$ [$°C$];
 \bar{T}^* , composante stationnaire de T^* dans le cas d'un chauffage pulsé [$°C$];
 δT^* , composante périodique de T^* dans le cas d'un chauffage pulsé [$°C$];
 X_n , fonction propre;
 a , diffusivité thermique [$m^2 s^{-1}$];
 b , valeur propre;
 c^n , fraction du cycle pendant laquelle la sonde dissipe de l'énergie;
 h , conductance thermique par unité de surface de contact sonde/milieu [$W m^{-2} °C^{-1}$];
 k , conductivité thermique [$W m^{-1} °C^{-1}$];
 r , rayon [m];
 t , temps [s];
 u , vitesse moyenne du sang [$m s^{-1}$];

π , $+(1 + \beta)^{-1}$, [$°C$];
 π , période dans le cas d'un chauffage par train de créneau [s];
 β , $= (\omega C_b r_s^2 k_M^{-1})^{1/2}$;
 ω , taux de perfusion [$kg s^{-1} m^{-3}$];
 ρ , masse spécifique [$kg m^{-3}$];
 θ , $= r(T - T_0)$ [$m °C$];

Indices

S , sonde;
 M , milieu dans lequel la sonde est implantée;
 a , sang artériel;
 b , sang;
 0 , initial.

INTRODUCTION

LA MESURE du débit sanguin intratissulaire à l'aide de sondes thermiques implantées *in vivo* a fait l'objet de nombreuses études expérimentales. La méthode la plus couramment utilisée est celle dite du 'thermocouple chauffé' ou de la 'sonde thermistor' qui dérive de la méthode de la "dilution thermique" proposée initialement par Gibbs [1]. Parmi les expérimentateurs ayant eu recours à cette méthode on peut citer: Grayson [2], Linzell [3], Hensel, Rueff et Golenhofen [4], Perl et Cucinell [5], Seylaz [6], Chato [7], Dittmar, Seylaz et Grivas [8], Dufour [9], Bowman et Balasubramaniam [10]. Le principe de la méthode est simple. Une sonde, dont la partie active est assimilable à une sphère, est introduite dans les

Symboles grecs

Θ , température stationnaire de la sonde implantée dans un milieu infini et dans le cas d'un chauffage constant, $\Theta = 3Q_S r_s^{-2} k_M^{-1} [H^{-1}$

tissus. Elle est de dimensions réduites—typiquement 1 à 2 mm—et comprend un élément résistif chauffant, et un élément thermométrique. Ce dernier peut être un thermocouple [1–4], ou une thermistance, [5–10]. Dans ce dernier cas, la résistance servant à dissiper l'énergie peut également servir à la mesure de la température. Cette configuration a été utilisée par Chato [7], et par Bowman et Balasubramaniam [10]. Par suite de la dissipation d'énergie, la sonde prend une température différente de celle régnant initialement dans les tissus. Cette surélévation de température est fonction de la conductivité thermique des tissus en régime stationnaire et de leur diffusivité thermique en régime instationnaire, ainsi que de la convection sanguine dans les capillaires que l'on peut supposer uniformément distribués. Deux types de fonctionnement sont possibles : dissipation d'énergie constante et mesure de la surélévation de température de la sonde [1, 4, 5], ou maintien de la sonde à une surélévation de température constante et mesure de l'énergie dissipée [2, 3, 6, 7, 9, 10]. Dans la pratique les variables et les paramètres qui influent sur la mesure sont fort nombreux, ce qui rend problématique l'isolement des effets propres à la seule convection sanguine. Aussi depuis plusieurs années un effort constant a-t-il été consenti en vue d'améliorer le réalisme des modèles mathématiques décrivant le système. Le présent travail se situe dans cette perspective visant à modéliser toujours plus finement la réponse instationnaire de la sonde et des tissus l'entourant.

MODELISATION

La sonde est supposée de forme sphérique, de rayon r_s , isotrope et homogène, de propriétés thermiques k_s , ρ_s , C_s . La puissance dissipée par unité de volume dans la sonde est $Q_s(t)$. Cette sonde est insérée dans un tissu biologique, lui-même assimilé à une sphère de rayon extérieur r_M , de propriétés thermiques k_M , ρ_M , C_M , parcouru par une circulation sanguine capillaire caractérisée par un taux de perfusion ω (débit masse de sang par unité de volume de tissu) et par une température de sang artériel T_a , et qui est le siège d'une production de chaleur par métabolisme, Q_M . Par ailleurs l'insertion de la sonde dans le milieu biologique est traumatisante. Autour de celle-ci on peut supposer qu'il existe une zone affectée par une hémorragie et siège de fibrinogénèse. Cette perturbation locale peut être assimilée à une résistance thermique de contact qui sera caractérisée par une conductance surfacique h .

L'équation de conservation de l'énergie dans le milieu biologique ainsi schématisé a été utilisée pour la première fois par Perl [11]

$$k_M \nabla^2 T_M - \rho_M C_M \frac{\partial T_M}{\partial t} - \omega C_b (T_M - T_a) + Q_M = 0. \quad (1)$$

Cette équation appelée 'équation de transfert bio-thermique' ou 'équation avec puits de chaleur' suppose

que les transferts convectifs se produisent dans les capillaires entre les tissus à la température locale T_M et le sang arrivant à la température artérielle T_a et repartant à la température des tissus, ce qui suppose un coefficient de transfert infini. Cette schématisation est critiquable car elle fait intervenir dans un bilan local un terme de bilan convectif global. Wulff [12], a fait la critique de cette formulation et montré que dans certains cas elle pouvait conduire à des estimations erronées. Une meilleure approche consiste à introduire un véritable terme de convection à la place du terme de puits de chaleur

$$k_M \nabla^2 T_M - \rho_M C_M \frac{\partial T_M}{\partial t} - \rho_b C_b \mathbf{u}_b \nabla T_M + Q_M = 0. \quad (2)$$

Dans cette équation \mathbf{u}_b est le vecteur vitesse local du flux sanguin. L'inconvénient de cette formulation plus correcte est qu'elle fait intervenir une inconnue vectorielle qui détruit la symétrie sphérique du problème et oblige à recourir à un traitement bi-dimensionnel. C'est vraisemblablement la raison pour laquelle la quasi totalité des auteurs a utilisé la première équation : [6, 11, 14]. L'équation (2) a seulement été résolue et utilisée en régime stationnaire par Priebe [15], et en régime instationnaire, mais en supposant la sonde chauffante ponctuelle, par Kondo *et al.* [16]. Malgré le manque de rigueur de l'équation (1), on utilisera cette modélisation compte-tenu de l'universalité de son emploi.

L'équation de conservation de l'énergie retenue pour les tissus s'écrit donc en coordonnées cylindriques

$$r_s < r < r_M \quad k_M \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_M}{\partial r} \right) - \rho_M C_M \frac{\partial T_M}{\partial t} - \omega C_b (T_M - T_a) + Q_M = 0.$$

L'équation de conservation de l'énergie pour la sonde s'écrit quant à elle

$$0 < r < r_s \quad k_s \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) - \rho_s C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} + Q_s(t) = 0.$$

L'état initial stationnaire est celui qui existait avant toute production de chaleur dans la sonde. On supposera la sonde, à l'état initial, en équilibre thermique avec les tissus

$$T_s(r, 0) = T_M(r, 0) = T_0 = T_a + \frac{Q_M}{\omega C_b} \quad \forall r.$$

Les conditions aux limites sont les suivantes

$$\text{en } r = 0, \quad T_s(0, t) = \text{valeur finie} \quad \forall t$$

en $r = r_s$, compte tenu de la résistance thermique de contact

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial r}(r_s, t) = k_M \frac{\partial T_M}{\partial r}(r_s, t) = h [T_s(r_s, t) - T_M(r_s, t)] \quad \forall t$$

en $r = r_m$, on supposera que la température est fixée à la valeur initiale

$$T_M(r_M, t) = T_0 \quad \forall t.$$

Posons $\theta = r(T - T_0)$, ce qui transforme le problème sphérique en un problème de barre, et utilisons par ailleurs les groupements suivants

$$H = \frac{hr_s}{k_M}; \quad \beta^2 = \frac{\omega C_b r_s^2}{k_M}; \quad K_0 = \frac{k_M}{k_s}; \quad R_0 = \frac{r_M}{r_s}.$$

Dans ces conditions les equations deviennent

dans la sonde

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial r^2} + \frac{r Q_s(t)}{k_s} = \frac{1}{a_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t}$$

dans les tissus

$$\frac{\partial^2 \theta_M}{\partial r^2} - \frac{\beta^2}{r_s^2} \theta_M = \frac{1}{a_M} \frac{\partial \theta_M}{\partial t}$$

à l'interface

$$H[\theta_M(r_s, t) - \theta_s(r_s, t)] = r_s \frac{\partial \theta_M}{\partial r}(r_s, t) - \theta_M(r_s, t) \\ = \frac{1}{K_0} [r_s \frac{\partial \theta_s}{\partial r}(r_s, t) - \theta_s(r_s, t)]$$

aux limites

$$\theta_M(r_M, t) = 0$$

et

$$\theta_s(0, t) = 0.$$

La présente modélisation est comparée dans le Tableau 1 à celles existantes. On n'a retenu que les modélisations pour lesquelles la solution instationnaire a été proposée:

- Perl [11];
- Balasubramaniam et Bowman [13];
- Johnson et Abdelmessih [14].

On notera essentiellement que, par rapport au modèle le plus évolué, celui de la référence [14], la présente approche permet de prendre en compte le fait que les tissus où la sonde est implantée ne s'étendent pas à l'infini. Par ailleurs les solutions publiées ont toutes été obtenues par la transformation de Laplace, ce qui n'est pas le cas du présent travail.

RESOLUTION DU SYSTEME

La méthode utilisée est celle des transformations intégrales finies. Elle consiste à rechercher des solutions du problème de la forme

$$\theta_s(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) X_{Sn}(r) \tag{3}$$

$$\theta_M(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) X_{Mn}(r). \tag{4}$$

La résolution du système s'effectue en deux étapes: la recherches des fonctions propres $X_{Mn}(r)$, $X_{Sn}(r)$, et des valeurs propres b_n , puis la recherche des fonctions $A_n(t)$.

Recherche des fonctions propres $X_{Sn}(r)$ et $X_{Mn}(r)$, et des valeurs propres b_n

Conformément à la théorie de Sturm-Liouville, les fonctions $X_{Sn}(r)$, $X_{Mn}(r)$, sont les solutions, à une constante multiplicative près, du système

$$\frac{d^2 X_{Mn}}{dr^2} - \frac{\beta^2}{r_s^2} X_{Mn}(r) + \frac{b_n}{a_M} X_{Mn}(r) = 0$$

$$\frac{d^2 X_{Sn}}{dr^2} + \frac{b_n}{a_s} X_{Sn}(r) = 0$$

$$H[X_{Mn}(r_s) - X_{Sn}(r_s)] = r_s X'_{Mn}(r_s) - X_{Mn}(r_s) \\ = \frac{1}{K_0} [r_s X'_{Sn}(r_s) - X_{Sn}(r_s)]$$

$$X_{Mn}(r_M) = 0$$

$$X_{Sn}(0) = 0.$$

Tableau 1. Récapitulation des diverses modélisations proposées par ordre de sophistication croissante

Modèle	Balasubramaniam [13]	Perl [10]	Johnson [14]	Présent travail
Sonde				
idéale, $k_s = \infty$		○		
réaliste, $k_s \neq \infty$	●		●	●
Génération de chaleur	$Q_s = A + Bt^{-1/2}$	Echelon	Echelon, créneau	Echelon, créneau
Contact				
parfait, $H = \infty$	○	○		
imparfait, $H \neq \infty$			●	●
Tissus				
sphère infinie, $r_M = \infty$	○	○	○	
sphère finie, $r_M \neq \infty$	○			●
conduction pure, $\beta = 0$		●	●	●
convection, $\beta \neq 0$				
Méthode de résolution	Transformation de Laplace	Transformation de Laplace	Transformation de Laplace	Transformations intégrales finies

La résolution de ce système donne à la fois les fonction propres $X_{S_n}(r)$, $X_{M_n}(r)$, et les valeurs propres b_n . Pour le détail des calculs, on se reportera aux références [17] et [18]. On trouve ainsi

$$X_{M_n}(r) = \left\{ k_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \cos \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] - \frac{k_s}{r_s} \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] + h \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] / \right. \\ \left. \times h \sin \left[(r_M - r_s) \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_M} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \right] \right\} \\ \times \sin \left[(r_M - r) \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_M} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \right] \\ X_{S_n}(r) = \sin \left[r \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right].$$

Les valeurs propres b_n sont toutes positives (voir [17] et [18]). Elles sont les racines de l'équation transcendante

$$hk_s \sin \left[(r_M - r_s) \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_M} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \right] \left\{ \frac{1}{r_s} \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] - \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \cos \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] \right\} \\ = k_M \left\{ \frac{1}{r_s} \sin \left[(r_M - r_s) \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_M} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \right] + \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_M} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \cos \left[(r_M - r_s) \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_M} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \right] \right\}$$

$$\times \left\{ k_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \cos \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] - \frac{k_s}{r_s} \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] + h \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] \right\}.$$

Recherches des fonctions $A_n(t)$ satisfaisant les relations (3) et (4)

Grâce à la propriété d'orthogonalité des fonctions $X_{S_n}(r)$, $X_{M_n}(r)$

$$\int_{r=0}^{r=r_s} k_s X_{S_n}(r) X_{S_m}(r) dr \\ + \int_{r=r_s}^{r=r_M} \frac{k_M}{a_M} X_{M_n}(r) X_{M_m}(r) dr = \delta_{mn} c_n$$

δ_{mn} étant le symbole de Kronecker.

$$c_n = \frac{k_s}{2a_s} \left(r_s - \left\{ \sin \left[2r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] / 2 \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right\} \right) \\ + \frac{k_M}{2a_M} \left\{ k_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \cos \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] - \frac{k_s}{r_s} \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] + h \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] / \right. \\ \left. h \sin \left[(r_M - r_s) \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_M} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \right] \right\}^2 \\ \times \left(r_M - r_s - \left\{ \sin \left[2(r_M - r_s) \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)} \right] \right\} \right)$$

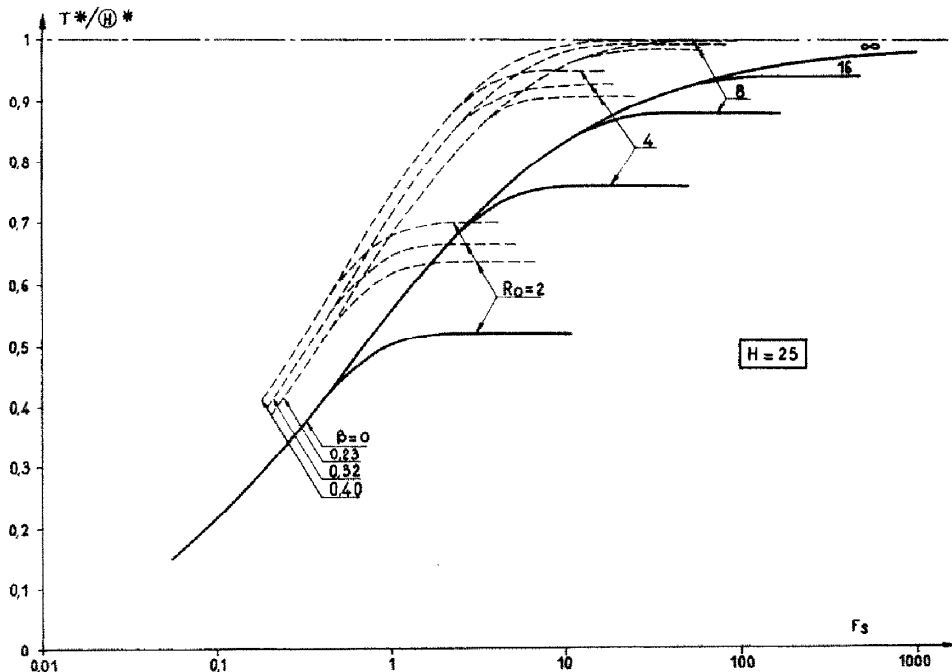


FIG. 1. Evolution de la température de la sonde dans le cas d'un chauffage en échelon : Influence du rapport des rayons R_0 , et de la convection sanguine.

$$2 \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s} - \frac{\beta^2}{r_s^2}\right)}$$

On établit que les fonctions $A_n(t)$ sont les solutions du système

$$\frac{dA_n}{dt} + b_n A_n(t) = \frac{Q_s(t)a_s}{c_n b_n} \times \left\{ \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] - r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \cos \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] \right\}$$

$$A_n(0) = 0.$$

La solution de ce système est

$$A_n(t) = \frac{a_s}{c_n b_n} \left\{ \sin \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] - r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \cos \left[r_s \sqrt{\left(\frac{b_n}{a_s}\right)} \right] \right\} e^{-b_n t} \int_0^t Q_s(u) e^{b_n u} du.$$

Les fonctions $X_{Sn}(r)$, $X_{Mn}(r)$ et $A_n(t)$ étant ainsi calculées, on peut évaluer les températures de la sonde et du milieu

$$\theta_s(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) X_{Sn}(r)$$

$$\theta_M(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) X_{Mn}(r).$$

APPLICATION DU MODELE

Le modèle numérique a été utilisé pour simuler des conditions expérimentales décrites dans la littérature: mesure de débit sanguin en régime stationnaire (chauffage en échelon) et en régime instationnaire établi encore appelé régime pulsé (train continu de créneaux de chauffage). Un certain nombre de résultats sont donnés à la suite à titre d'illustration des possibilités du modèle.

Réponse à un chauffage en échelon

Supposons que l'énergie dissipée soit constante à partir du temps initial. $Q_s = Cte$ pour $t > 0$. La température dans la sonde tend vers un état stationnaire qui dépend de R_0 , K_0 , k_M , β et H . L'évolution de la température de la sonde à l'interface sonde-tissus, $T_s(r_s, t) = T^*(t)$ est donnée sur la Fig. 1 pour plusieurs valeurs du paramètre R_0 et pour plusieurs valeurs de débit sanguin. Ces résultats ont été obtenus avec les conditions suivantes:

sonde ayant les propriétés thermiques du cuivre: $k_s = 400 \text{ W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ et $\rho_s C_s = 2 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

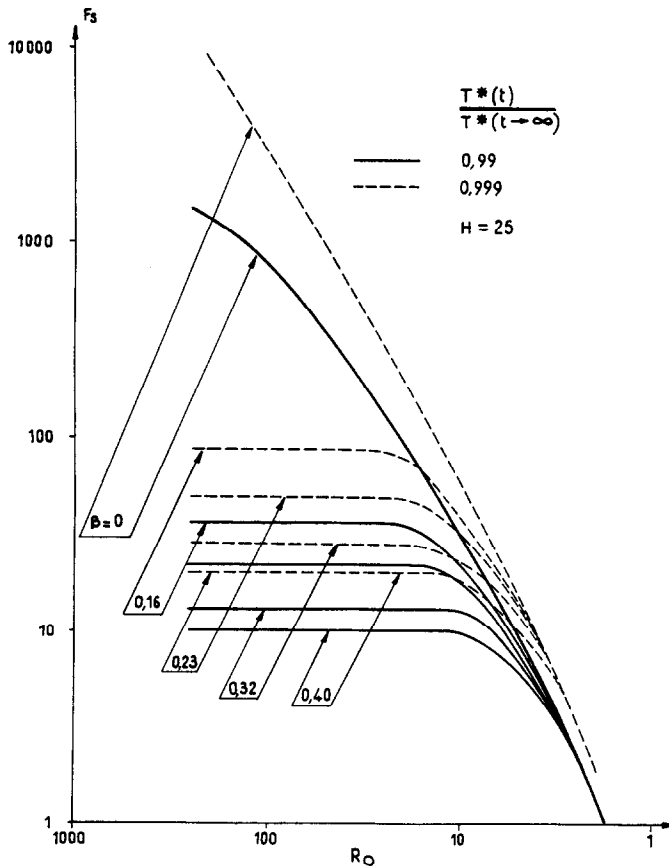


FIG. 2. Influence de la convection sanguine sur l'obtention du régime asymptotique stationnaire dans le cas d'un chauffage en échelon.

tissus: $k_M = 0,4 \text{ W m}^{-1} \text{ C}^{-1}$ et $\rho_M C_M = 4 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ C}^{-1}$

contact thermique: résistance thermique de contact surfacique $R = 10^{-4} \text{ C m}^2 \text{ W}^{-1}$ d'où une valeur $H = 25$.

Les courbes $T^*(t)/\Theta^*$ sont tracées en fonction du nombre de Fourier relatif au rayon de la sonde, $F_s = a_M t / r_s^2$. Deux faits se dégagent:

l'obtention du régime stationnaire est d'autant plus rapide que la convection sanguine est importante (β grand);

l'état stationnaire correspondant à des valeurs finies de R_0 est d'autant plus proche de l'état stationnaire $\Theta^* = T^*(t \rightarrow \infty, R_0 \rightarrow \infty, \beta)$ que β est grand.

Ces constatations sont bien mises en évidence sur la Fig. 2 en ce qui concerne l'obtention du régime stationnaire et sur la Fig. 3 en ce qui concerne l'influence sur cet état stationnaire du rapport des rayons, R_0 . Sur la Fig. 2 les conditions d'obtention du régime stationnaire asymptotique sont présentées: nombre de Fourier F_s pour lequel l'état asymptotique est obtenu au 1/100 e près ou au 1/1000 e près. L'influence de la convection sanguine apparaît très nettement. Ainsi pour $R_0 = 20$, on obtient, au 1/100 e près, le régime stationnaire dès que $F_s > 10$ lorsque $\beta = 0,40$ (soit un taux de perfusion $\omega = 15 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-3}$) alors que ceci n'est obtenu que pour $F_s > 35$ si $\beta = 0,16$ ($\omega = 2,5 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-3}$) ou bien $F_s > 90$ si $\beta = 0$ (conduction pure). La Fig. 3 montre l'influence sur la température de la sonde du fait que les tissus ne s'étendent pas jusqu'à

l'infini. Dans le cas d'une convection sanguine normale ($\beta = 0,32$) et pour des valeurs du rapport R_0 d'environ 8-10, cette influence est négligeable (inférieure au pour cent). Ce n'est pas le cas lorsque le milieu est purement conductif ($\beta = 0$).

En définitive, le présent modèle, assimilant les tissus à une sphère de rayon r_M fini, montre que dans le cas d'une mesure en régime stationnaire:

il est légitime d'utiliser un modèle à rayon r_M infini tel que celui de la référence [14] dans le cas d'une convection normale ($0,32 < \beta < 0,40$ c'est à dire $5 < \omega < 15 \text{ kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}$) lorsque les dimensions des tissus dans lesquels la sonde est implantée sont d'environ une dizaine de fois celles de la sonde; lors d'une implantation de la sonde dans un milieu non perfusé, ce qui peut être le cas d'une expérience de calibration de la sonde, les dimensions du milieu doivent être très grandes devant celles de la sonde si l'on veut appliquer le modèle à rayon r_M infini.

Réponse à un chauffage périodique (train de créneaux)

Un autre mode de chauffage possible consiste à dissiper de l'énergie dans la sonde sous la forme d'un train de créneaux. Soit π la période et c la fraction de cette période pendant laquelle l'énergie est dissipée à puissance volumique constante. Au bout d'un certain temps un régime périodique stationnaire est obtenu. La température est alors la somme d'une composante stationnaire et d'une composante périodique, (voir Fig. 4)

$$T^*(t) = \bar{T}^* + \delta T^*(t).$$

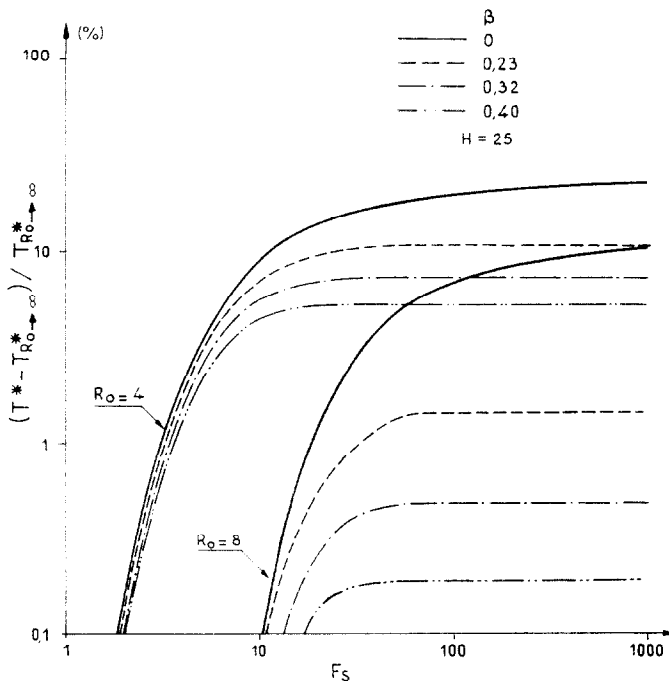


FIG. 3. Influence sur la température de la sonde du fait que les tissus sont de dimensions finies, dans le cas d'un chauffage en échelon.

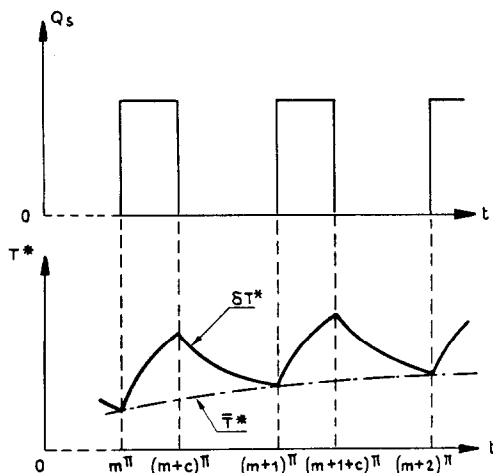


FIG. 4. Fonctionnement de la sonde en régime pulsé: dissipation d'énergie suivant un train de créneaux, et température superficielle de la sonde de la forme: $T^*(t) = \bar{T}^*(t) + \delta T^*(t)$.

Comme la référence [14] l'indique, le débit sanguin et la conductivité thermique peuvent être évalués à tout instant à partir de l'analyse de chacune des deux composantes, mais on a intérêt à se servir de préférence de la composante périodique, et cela pour deux raisons:

l'amplitude de la composante périodique est généralement plus grande que celle de la composante stationnaire,

le temps d'établissement de cette composante est très grand, alors que pour analyser les fluctuations du débit sanguin à partir de la composante périodique, il suffit que la période π soit petite devant le temps caractéristique de ces fluctuations.

Le présent modèle permet d'ajouter une troisième raison militant pour l'utilisation de la composante périodique de préférence à celle de la composante stationnaire: l'influence des conditions aux limites externes du milieu étudié est beaucoup plus faible sur la composante périodique que sur la composante stationnaire. Ceci apparaît sur les Figs. 5 et 6. Sur le Fig. 5 l'évolution de la composante stationnaire de la

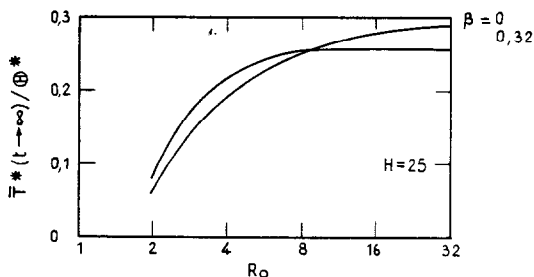


FIG. 5. Sonde en régime pulsé: Influence sur la composante stationnaire \bar{T}^* du fait que le milieu est de dimensions finies.

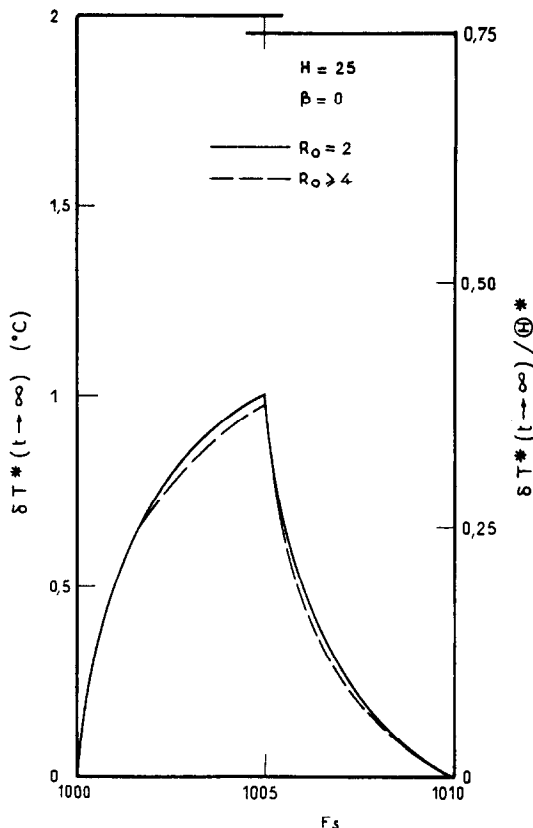


FIG. 6. Sonde en régime pulsé: Influence sur la composante périodique de la température δT^* , du fait que le milieu est de dimensions finies.

température de la sonde est présentée en fonction du rapport R_0 . Dans le meilleur des cas— $\beta = 0,32$ —il est nécessaire d'avoir une sphère de tissus 8–10 fois plus grande que la sonde pour éliminer toute influence perturbatrice des conditions aux limites extérieures. Sur la Fig. 6 on a représenté l'évolution pendant un cycle de la composante périodique. Dès que R_0 est égal à 4, l'influence des limites extérieures devient négligeable, qu'il y ait convection sanguine ou non. Par ailleurs, même quand les conditions aux limites extérieures se font sentir, leur influence reste faible. Ceci est dû au fait que la composante périodique intéresse un volume plus restreint que la composante stationnaire. C'est pour cette raison que le temps de réponse de cette composante périodique est plus court que celui de la composante stationnaire.

CONCLUSIONS

La méthode des transformations intégrales finies s'est révélée être particulièrement bien adaptée pour traiter la modélisation d'une sonde de débitmétrerie sanguine intratissulaire. La modélisation ainsi réalisée est la plus générale qui soit, puisque l'on considère une sonde de conductivité thermique finie, en contact

thermique imparfait avec le milieu perfusé, de dimensions finies dans lequel elle est implanté.

A l'aide de ce modèle, on a pu étudier, tant en régime permanent (échelon de chauffage), qu'en régime pulsé (train de créneaux), l'influence sur la mesure du fait que les dimensions de la sonde peuvent ne pas être négligeables devant celles du milieu. Dans des conditions circulatoires normales, il apparaît que la dimension caractéristique du milieu instrumenté doit être 8–10 fois plus grande que celle de la sonde pour éviter que les conditions aux limites extérieures n'apportent des perturbations à la mesure. Dans le cas d'un étalonnage de la sonde dans un milieu passif, c'est à dire sans perfusion, cette dimension doit être nettement plus grande.

Dans le cas particulier d'une sonde en régime pulsé, la composante périodique de la température de la sonde se révèle beaucoup moins sensible à ces conditions aux limites externes, que la composante stationnaire.

REFERENCES

1. F. A. Gibbs, A thermoelectric blood flow recorder in the form of a needle, *Proc. Soc. Exp. Biol. (N.Y.)* **31**, 141–146 (1933).
2. J. Grayson, Internal calorimetry in the determination of thermal conductivity and blood flow, *J. Physiol. (Lond.)* **118**, 54–72 (1952).
3. J. L. Linzell, Internal calorimetry in the measurement of blood flow with heated thermocouples, *J. Physiol. (Lond.)* **121**, 390 (1953).
4. H. J. Hensel, J. Rueff et K. Golenhofen, Fortlaufende registrierung der Muskeldurchblutung am Menschen mit einer Kalorimetersonde, *Pflügers Arch.* **259**, 267 (1954).
5. W. Perl et S. A. Cucinell, Local blood flow in human leg muscle by a transient response thermoelectric method, *Biophysic. J.* **5**, 211–230 (1965).
6. J. Seylaz, Biophysique de la mesure rapide de l'irrigation sanguine locale, *Helv. Physiol.* **26**, 1–32 (1968).
7. J. C. Chato, A method for the measurement of thermal properties of biological materials. ASME Symp. on Thermal Problems in Biotechnology LCNO 68-58-741 (1968).
8. A. Dittmar, J. Seylaz et C. L. Grivas, Etude critique d'une sonde à thermoconductibilité pour la mesure du débit sanguin local, *Proc. BIOCAPT* **75**(2), 353–358 (1975).
9. R. Dufour, Contribution à l'étude de la régulation de la circulation cérébrale, Thèse Doct. ès-sciences nat., Paris VI (1974).
10. H. F. Bowman et T. A. Balasubramaniam, A new technique utilizing thermistor probes for the measurement of thermal properties of biomaterials, *Cryobiology* **13**, 572–580 (1976).
11. W. Perl, Heat and matter distribution in body tissues and the determination of tissue blood flow by local clearance methods, *J. Theoret. Biol.* **2**, 201–235 (1962).
12. W. Wulff, The energy conservation equation for living tissue, *IEEE Trans Biomed. Engng* (Nov.), 494–495 (1974).
13. T. A. Balasubramaniam et H. F. Bowman, Temperature field due to time dependent heat source of spherical geometry in an infinite medium, *J. Heat Transfer, Trans. ASME* **96**(3), 296–299 (1974).
14. W. R. Johnson and A. H. Abdelmessih, Two-regime model of the perfusion measuring heated thermocouple probe, *Bull. Math. Biology* **38**, 633–642 (1976).
15. L. Priebe, Methods of thermal blood flow measurement, Thermography, *Proc. 1st Europ. Congr. Amsterdam* 1974. *Bibl. Radiol.*, no. 6, 33–44. Karger, Basel (1975).
16. B. Kondo, T. Soma, C. Uyama, T. Sawai, M. Kobayashi, K. Tsunekawa, K. Mohri, M. Ikeda, N. Ohgushi et M. Sato, Principle and *in vivo* application of measurement of blood flow by heated thermocouple with feedback controlled heater, *Jap. Circulation J.* **32** **9**, 1215–1220 (1968).
17. D. Tsacalos, Résolution des problèmes de thermocinétique linéaire par la méthode des transformations intégrales finies, *Revue Gén. Thermique* **214**, 609–619 (1979).
18. D. Tsacalos, Résolution des problèmes de thermocinétique linéaire par la méthode des transformations intégrales finies: milieux composites, à paraître dans la *Revue Gén. de Thermique*.

FINITE INTEGRAL TRANSFORMATION METHOD APPLIED TO THE MODELIZATION OF A BLOOD-FLOW PROBE

Abstract—The finite integral transformation method is applied to the modelization of a blood-flow spherical probe—heated thermocouple or thermistor probe. The present modelization is very general and allows the study of the influence on the measure of the fact that the instrumented medium dimensions are finite. It is demonstrated that deviations from the infinite medium theory cannot be neglected if the probe dimensions are greater than 0.1 times those of the medium.

ANWENDUNG DES VERFAHRENS DER ENDLICHEN INTEGRALTRANSFORMATIONEN ZUR SIMULIERUNG EINER SONDE FÜR BLUTDURCHSATZMESSUNGEN IN GEWEBEN

Zusammenfassung—Das Verfahren der endlichen Integraltransformationen wird zur Simulierung einer Kugelsonde des Typs "geheiztes Thermopaar" oder "Thermistor" für Blutdurchsatzmessungen in Geweben angewendet. Das so erhaltene Modell ist sehr allgemein anwendbar. Es erlaubt unter anderem die Untersuchung des Einflusses der endlichen Dimensionen des instrumentierten Mediums auf die Messung. Es wird gezeigt, daß die durch die äußeren Grenzbedingungen verursachte Störung nicht vernachlässigbar ist, wenn die Dimensionen des Mediums kleiner als das Zehnfache der Dimensionen der Sonde werden.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДАТЧИКА РАСХОДА КРОВИ В ТКАНЯХ

Аннотация—Метод конечных интегральных преобразований используется для моделирования сферического зонда типа нагреваемой термопары или термистора для измерения расхода крови в тканях. Моделирование носит достаточно общий характер и позволяет учитывать влияние конечных размеров среды на точность измерений. Показано, что это влияние становится существенным и его необходимо учитывать при размерах зонда, превышающих в 0.1 раза размеры среды.